Etude d’un pavage du château de Malbork en Pologne

C’est au cours du voyage « Aux Pays de l’ambre » d’un groupe de l’Association Arts et Vie (1), le 19 juin 2013, qu’un pavage du château de Malbork a attiré notre attention. C’était le château des Grands Maîtres des chevaliers teutoniques, élevé à partir de 1276, reconstruit au 18ème siècle, restauré aux 19 et 20èmes siècles (2). Il est situé près de la ville de Gdansk. Il s’agit du sol du grand réfectoire utilisé en été. Au cours de la visite dense et rapide, il n’a été possible que de prendre rapidement une photographie de ce pavage :

Pour en saisir l’aspect général, il est nécessaire de reconstruire ce pavage sur une surface plus grande à l’aide des lois de la science appelée cristallographie. Ce schéma, facile à produire, est tourné de 45 degrés par rapport à la photographie, il correspond aux directions de travail du carreleur (fig. 1) .

2014 année de la cristallographie

Il faut préciser que le terrain d’étude de la cristallographie est limité, hors les quasicristaux, aux structures périodiques telles que les milieux cristallisés de composés inorganiques comme le sel de cuisine, organiques comme le sucre de betteraves, en fait des dizaines de milliers de substances et matériaux à l’exception toutefois des verres. Les mêmes lois permettent aussi d’interpréter les structures périodiques macroscopiques à deux dimensions qui nous entourent telles que papiers peints à raccords (3), tissus, carrelages et ce pavage qui va nous servir à montrer son intérêt tout en présentant quelques aspects de la démarche du cristallographe.

2014, en réalité, et avec un peu de retard, c’est le centenaire de la radiocristallographie (4) qui a permis de voir à l’intérieur des cristaux à l’échelle des atomes et de procéder à la mesure absolue des distances sub-microscopiques. Ces résultats sont obtenus par diffraction des rayons X sur les structures périodiques des milieux cristallisés.
Cependant les débuts de la théorie géométrique des cristaux se situent un siècle plus tôt. C’est donc aussi un bicentenaire que nous allons illustrer ici en explicitant les deux propriétés que sont la périodicité et la symétrie.

Les réseaux de translation

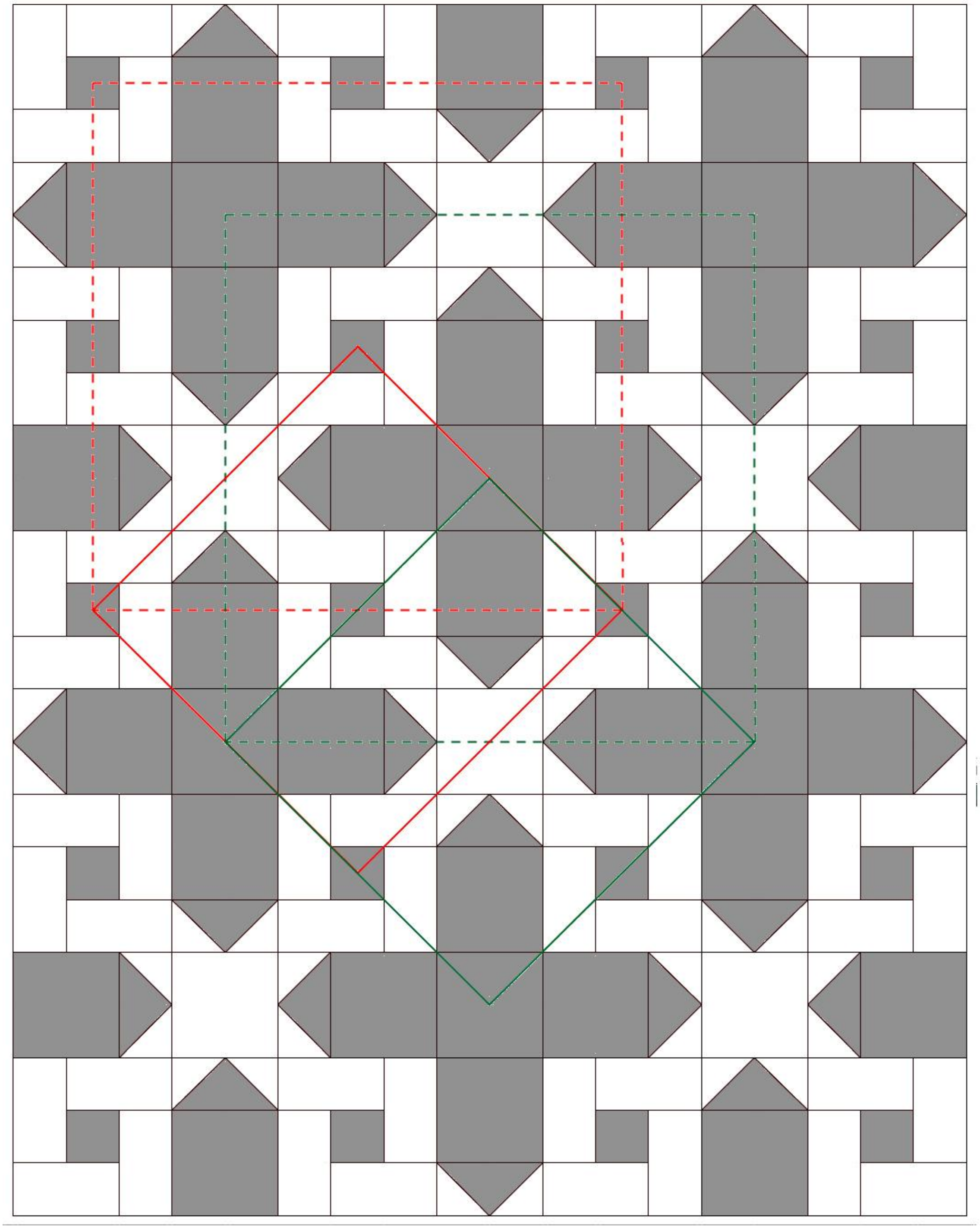


Figure 1 Le pavage reconstruit.

Les deux mailles carrées, rouges ou vertes sont équivalentes. Elles renferment le minimum pour décrire ce pavage. Elles mettent en évidence les deux motifs qui forment ce carrelage et qui sont analysés séparément. Les deux mailles en traits interrompus correspondent à la représentation conventionnelle du cristallographe de l'ensemble du sol, on se reportera pages 7 et 8.

La périodicité

Ces milieux se répètent comme une feuille de timbres de la Poste, le graveur n'a gravé qu'une vignette, l'imprimeur a juxtaposé les timbres selon deux translations définies par les côtés de la vignette, celles-ci définissent la maille. Toute la feuille est décrite par la donnée de la maille qui est un cadre vide dans lequel on met le contenu qui est l'image.
Ce cadre est important, si on le déplace parallèlement à lui-même et on le dispose en un point quelconque d'un timbre, les extrémités de la maille aboutissent en un point identique dans les vignettes adjacentes et, en définitive, ce cadre renfermera toujours quatre morceaux de timbres qui reconstituent l'image complète.

Il n'y a que 5 types de mailles à 2 dimensions, le parallélogramme quelconque est le cas général. En ajustant la longueur des 2 côtés de la maille, et l'angle entre eux, on a 4 cas particuliers : le rectangle, le losange quelconque, le losange à 60 et 120 degrés et le carré.

Observons à présent ce pavage reconstitué (figure 1) en prenant comme repère le centre du petit carré entouré de 4 « briques » qui semblent tourner autour de lui. Par commodité on a appelé « brique » les carreaux de côtés a et 2a. On peut alors définir la maille en allant de ce point à un autre identique immédiatement voisin. Il ne faut pas se tromper car il y a un autre petit carré entouré de 4 « briques » qui semblent tourner dans l'autre sens ce qui n'est pas équivalent. On arrive alors à décrire ce pavage par une maille carrée qui renferme tout le minimum à connaître pour décrire ce sol et dont la maille particulière annonce la symétrie. On vérifie que cette maille est bien représentative de la périodicité de ce milieu en prenant, par exemple, une autre origine comme le milieu de la croix, c'est la maille verte qui a bien la même dimension et orientation que la maille rouge, elle décrit aussi ce pavage.

Pour compléter cette notion de maille, on a aussi représenté deux cadres en traits interrompus, tournés de 45 degrés par rapport aux précédents, leur surface est double, ils sont donc redondants car ils renferment deux fois le même message de ce carrelage. Cependant, c'est ce type de maille qui sera la maille conventionnelle du cristallographe en conclusion de l'étude de la symétrie.

La symétrie

Les opérateurs de symétrie sont des axes ou des plans appelés aussi miroirs, ils sont nécessairement perpendiculaires à la surface du pavage et se placent à des endroits bien précis.
Les axes sont ici de 2 sortes, d'ordre 2 ils réalisent la superposition du pavage avec lui-même après une rotation d'un demi tour (symbole un ovale) et des axes d'ordre 4 qui réalisent la superposition au bout d'un quart de tour (symbole un petit carré).

Les plans de symétrie sont aussi de 2 sortes. D'abord le miroir ordinaire qui réalise la superposition de la moitié du pavage avec l'autre moitié. Cette opération nous est assez familière car nous avons un plan de symétrie vertical passant au milieu de notre corps. La mise en correspondance de la main gauche avec la main droite, par exemple, montre que nous avons affaire à une opération de symétrie inverse.

Un objet qui ne possède pas le plan comme élément de symétrie pour lui-même ne sera pas superposable à son image comme le gant gauche et le gant droit. Le symbole est un trait plein montrant la trace d'intersection du plan de symétrie vertical avec le pavage horizontal, on écrit aussi m.
Ensuite, plus compliqué, le plan de symétrie avec glissement dont la trace est en trait interrompu, on écrit aussi g. Cette trace d'intersection avec le pavage est nécessairement une direction de périodicité du pavage, par exemple de longueur p, et l'opération se fait en 2 temps : d'abord une symétrie de type m et ensuite une translation de longueur p/2 le long de la trace. On note les 2 types de miroirs sur le pavage du carreleur car ils sont plus faciles à voir avec cette orientation (fig.2).

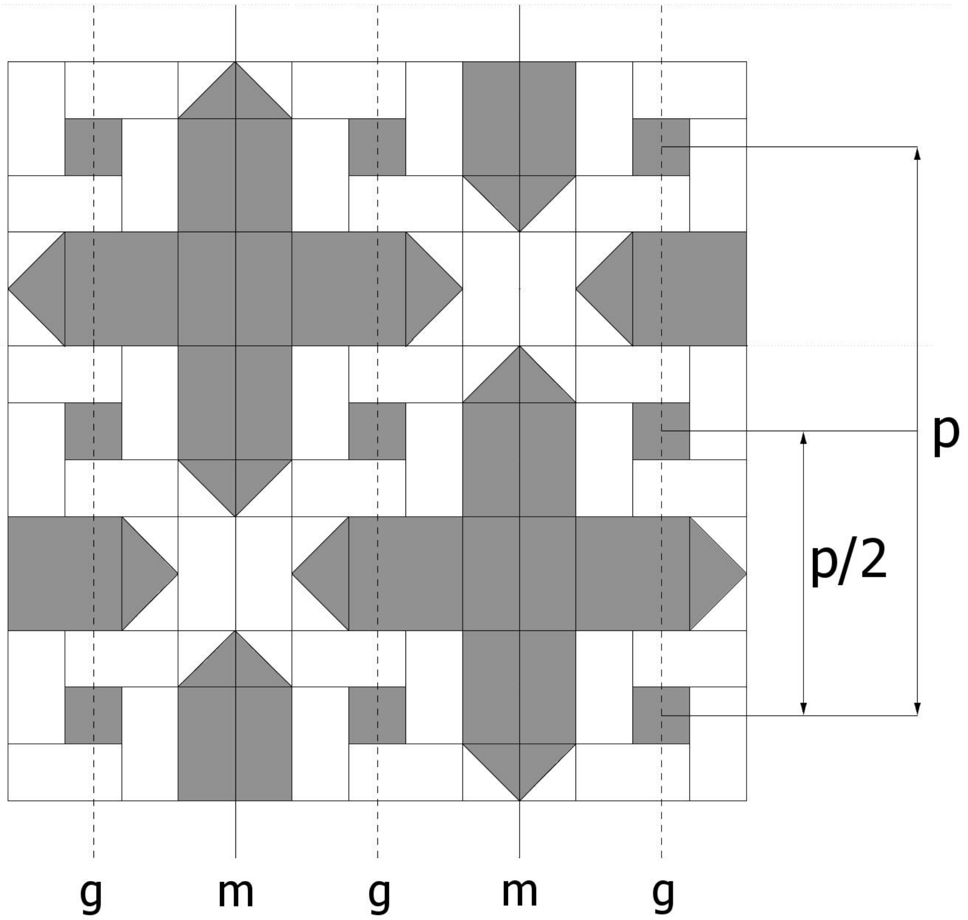


Figure 2 Les plans de symétrie, miroir simple m et miroir avec glissement g

Afin de bien illustrer la notion de groupe de symétrie en cristallographie, on procède en trois étapes. On isole d'abord un premier motif limité à la distribution des petits carrés entourés de 4 « briques » (motif 1). Ensuite, on considère un autre groupe de symétrie formé par les croix (motif 2). Enfin, la réunion des deux groupes de symétrie « carrés » va déterminer un troisième groupe pour l'ensemble du sol dont le degré de symétrie est diminué tout en gardant cet aspect visuel « carré » qui reste très apparent au niveau de ce pavage.
A chaque étape, ces interprétations seront comparées au canevas théorique publié dans les Tables Internationales pour la cristallographie (5).

Groupe de symétrie du motif 1

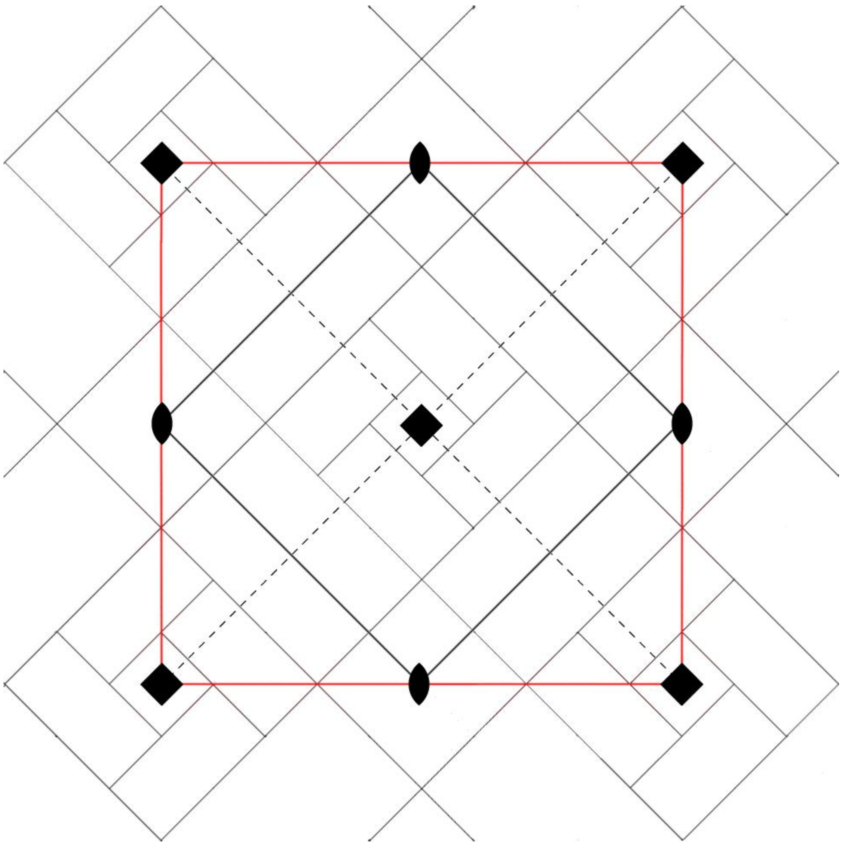
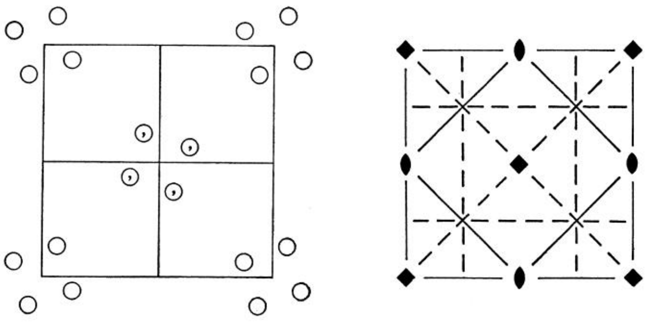


Figure 3 Distribution spatiale du motif 1 avec une partie des opérateurs de symétrie placés dans la maille.

Square 4 *m m* *p* 4 *g m* No. 12 ***p*4*g***



Origin at 4

Number of positions, Wyckoff notation, and point symmetry			Co-ordinates of equivalent positions	Conditions limiting possible reflections
				General:
8	*d*	1	$x,y;\ \ y,\bar{x};\ \ \tfrac{1}{2}-x,\tfrac{1}{2}+y;\ \ \tfrac{1}{2}-y,\tfrac{1}{2}-x;$ $\bar{x},\bar{y};\ \ \bar{y},x;\ \ \tfrac{1}{2}+x,\tfrac{1}{2}-y;\ \ \tfrac{1}{2}+y,\tfrac{1}{2}+x.$	*hk*: No conditions *h*0: $h=2n$ (0*k*: $k=2n$) *hh*: No conditions

Figure 4 Tables Internationales (5) groupe de symétrie n° 12 « p4g » haut de la page 67.

Le schéma à gauche décrit la multiplication d'un objet placé dans une position quelconque dans la maille, le petit rond. Le petit rond dans lequel il y a une virgule a été obtenu par une opération de symétrie inverse qui n'est pas superposable dans le cas général (les gants) à l'objet de départ. Le schéma de droite donne la nature et la position des opérateurs de symétrie dans la maille.

En considérant tous les 17 groupes spatiaux à 2 dimensions décrits dans les Tables, on constate qu'il n'y en que trois de symétrie « carrée » et celui auquel appartient ce motif 1 est de beaucoup le plus complexe. Ces Tables sont une aide pour l'identification des structures, que le lecteur se rassure s'il ne retrouve pas tous les opérateurs de symétrie. Ceux-ci forment un groupe de symétrie au sens mathématique du terme, ils sont solidement unis même si on ne les voit pas tous dans leur ensemble. C'est pourquoi on a volontairement omis de représenter une paire de miroirs avec glissement sur la figure 3 car difficiles à voir, mais ils existent parfaitement sur le schéma théorique, on peut essayer de les retrouver !

On est surpris par la richesse d'inspiration qui a présidé à sa réalisation. Il répond en tout point au canevas théorique avec ses pièces en céramique disposées en accord avec la symétrie des sites du groupe « p4g » auquel il appartient. En effet, ce que l'on a appelé « brique » se trouve en position générale dans la maille au nombre de 8, 4 aux coins et 4 au centre. On notera que la « brique » possédant elle-même des plans de symétrie, la « virgule » du schéma théorique devient inutile. Ces « briques » sont disposées autour des petits carrés qui sont en position particulières au sommet et au centre de la maille.

Si l'on devait prêter vie à ce motif comme un cristal fait d'atomes qui vibrent autour de leur position d'équilibre suite à l'agitation thermique, on voit que les 4 « briques » au sommet de la maille oscillent en sens inverse que les 4 « briques » au centre suite à l'effet miroir.

Groupe de symétrie du motif 2

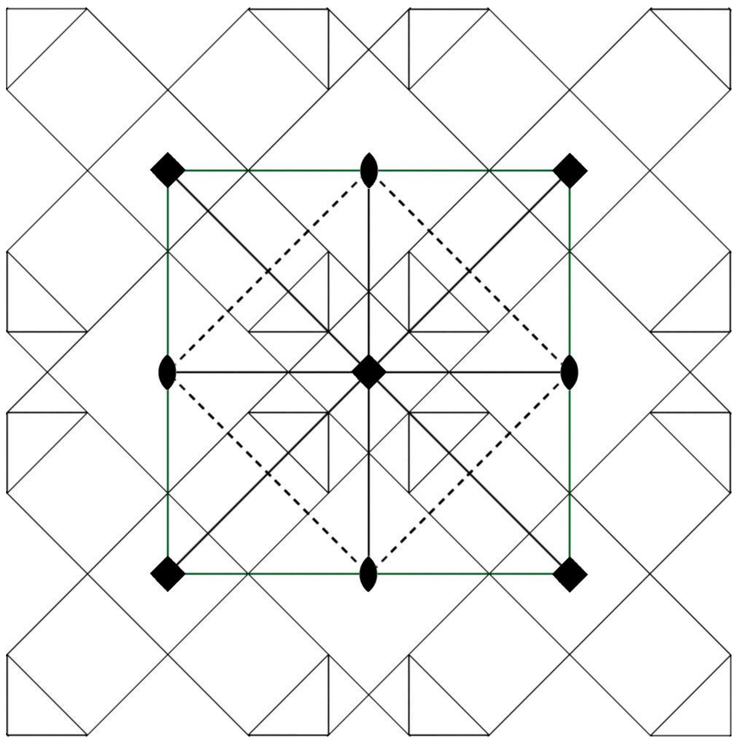
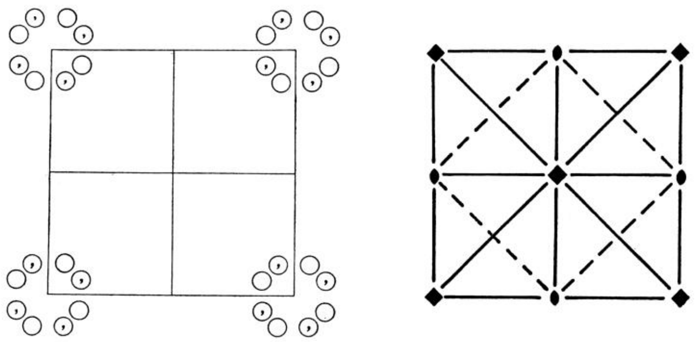


Figure 5 Motif 2 avec les opérateurs de symétrie placés dans la maille

La répartition périodique des croix correspond au groupe de symétrie n°11 « p4m ». Le centre des croix occupe une position particulière dans la maille à l'intersection de deux miroirs orthogonaux m, sur l'axe de symétrie quaternaire. C'est comme si les 8 positions générales équivalentes (les petits ronds) du schéma théorique étaient condensées en une seule au niveau de la maille, la croix étant compatible avec la symétrie de ce site.

*p*4*m* No. 11 *p* 4 *m m* 4 *m m* Square



Origin at 4*mm*

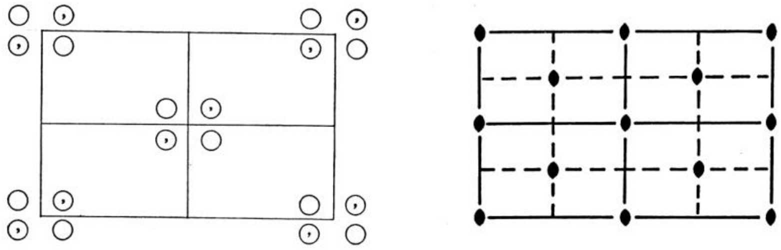
Number of positions, Wyckoff notation, and point symmetry			Co-ordinates of equivalent positions	Conditions limiting possible reflections
				General:
8	*g*	1	$x,y;\ \bar{x},\bar{y};\ y,\bar{x};\ \bar{y},x;\ \bar{x},y;\ x,\bar{y};\ \bar{y},\bar{x};\ y,x.$	No conditions

Figure 6 Tables Internationales (5) groupe de symétrie n° 11 « p4m » haut de la page 66.

Groupe de symétrie du pavage en entier

En se reportant à la figure 1, on voit que les mailles rouge et verte sont décalées d'une demi translation du réseau carré, si bien que les axes de symétrie quaternaires et binaires se retrouvent sur un même site, ce qui est incompatible et seule l'opération de symétrie commune peut subsister, à savoir les axes d'ordre 2. On change donc radicalement de groupe de symétrie qui ne sera plus « carré » mais seulement « rectangle ».
Le choix de la maille de référence sera celle en traits interrompus, selon les directions de travail du carreleur, dans laquelle, après toute l'étude précédente, il est facile de placer les opérateurs de symétrie pour former le groupe n° 9 « cmm » de la figure 7. Le réseau de translation carré subsiste comme un cas limite du rectangle.
Dans le cas d'un cristal réel formé d'atomes, celui-ci tend à s'organiser pour minimiser son énergie et l'ordre local retentit sur la périodicité de tout le solide. Il y a donc une relation entre la symétrie des sites et celle du réseau. Ici, il n'en est rien, les carreaux de céramique sont sans interaction énergétique entre eux et ils ne sont fédérés que par l'inspiration humaine pour former un sol compact esthétiquement d'une grande richesse.

cmm No. 9 *c* 2 *m m* *m m* Rectangular



Origin at $2mm$

Number of positions, Wyckoff notation, and point symmetry			Co-ordinates of equivalent positions	Conditions limiting possible reflections
			$(0,0;\ \frac{1}{2},\frac{1}{2})+$	
				General:
8	f	1	$x,y;\ \bar{x},y;\ \bar{x},\bar{y};\ x,\bar{y}.$	hk: $h+k=2n$

Figure 7 Tables Internationales (5) groupe de symétrie n° 9 « cmm » haut de la page 64

Ainsi on ne peut être qu'en admiration devant cette prescience et l'origine de cette perfection devra être recherchée ailleurs que dans les outils de la cristallographie, en sciences humaines, philosophie et histoire sans insister ici sur la vaste symbolique de la croix ainsi que celle du cube, autrefois symbole de la perfection, le carré étant l'un des côtés.

Le remarquable exemple de Malbork devrait inciter les designer, plasticiens et autres graveurs de notre temps à proposer d'autres œuvres qui seraient en accord avec la périodicité à 2 dimensions de surfaces planes. Il n'y a certes que les 17 schémas structuraux décrits par les groupes spatiaux, mais ils autorisent une infinie variété de dimension et d'utilisation des matériaux ainsi que de figures sans aucune limite dans leur invention. Le respect strict de la périodicité serait plutôt de nature à exalter la qualité de la production. C'est le cas du sonnet en poésie qui contraint l'inspiration dans une forme rigide que l'on peut, cependant, sublimer avec une parfaite maîtrise de la langue pour produire de rares joyaux impérissables. Nous espérons qu'il en sera de même ici, à condition toutefois que l'acteur accepte de faire l'effort d'assimiler les connaissances de notre temps sans se complaire dans une idée fixe ou dans une dérisoire vision pétrie d'ignorances.

Cette étude nous donne l'occasion de saluer la mémoire du professeur Stanislas Goldsztaub (1906-1978), d'origine polonaise, qui a été titulaire de la chaire de minéralogie de l'Université de Strasbourg dans les années 1950 à 1976. Il a été l'élève, à Paris, du professeur C. Mauguin qui a participé à la rédaction de la première édition des Tables Internationales parues en 1935. Le professeur S. Goldsztaub a été l'un des pionniers dans la mise en œuvre des méthodes de caractérisation physico-chimiques de la surface des matériaux.

Depuis ce temps, de nombreux travaux ont débouché sur des applications industrielles de haute technologie pour produire des composants en informatique. Les circuits électroniques sont déposés en couches minces à l'échelle du micromètre sur des surfaces monocristallines de silicium. C'est avec un appareil numérique que nous avons saisi l'image de ce pavage, une rencontre à 2 dimensions en quelque sorte !

Je dédie ce devoir de vacances à l'ensemble du groupe de personnes (et non de symétrie) que nous avons formé dans une bonne entente, à notre sympathique et efficace accompagnatrice Monique Signour et, surtout, à notre aimable guide polonaise Arleta Domowicz de Gdansk-Sopot-Malbork et Frombork dans l'espoir qu'elle ne pourra plus jamais fouler du pied ce carrelage sans ressentir un certain vertige.

Roland Cousandier

octobre 2013 docteur d'Etat en sciences physiques

Références :
(1) Arts et Vie Voyages culturels 39, rue des Favorites 75738 Paris-Cedex

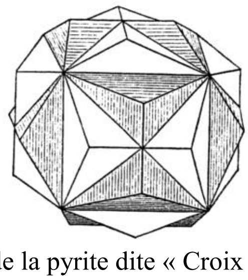
(2) Les ordres religieux Flammarion (1972)
T I Dom Maur Cocheril : les ordres militaires p.67

(3) L'OUVERT
Journal de l'A.P.M.E.P. (Association des Professeurs de Mathématique de l' Enseignement Public) et de l'I.R.E.M. de l'Université de Strasbourg.
R. Cousandier et P. Buchert
Les lois de la cristallographie en décoration plane périodique.
1ère partie n° 100 et 101 septembre 2000 pages 52 à 68
2ème partie n° 102 décembre 2000 pages 15 à 28.

(4) 2014 Année Internationale de la Cristallographie : contact@aicr2014.fr

(5) International Tables for X-Ray crystallography Vol. I Symmetry Groups
The Kynoch Press Birmingham, England (1952)

Mes remerciements à Paul Cousandier, professeur de physique-chimie, pour le traitement informatique du texte et des figures, et à Claude Speisser, maître de conférence à l'IUT Louis Pasteur de l'Université de Strasbourg, pour la relecture avisée du texte.



Macle de la pyrite dite « Croix de Fer »
d'après la décoration militaire allemande
évolution de la Croix des Chevaliers Teutoniques